

F.M.Məmmədova
müəllim, Azərbaycan Əmək və Sosial Münasibətlər Akademiyası
firanam@mail.ru

Məqalə redaksiyaya daxil olub 21.01.2026

The article was received by editorial board on 21.01.2026

Статья принята к печати 21.01.2026

MAKSİMUM OXŞARLIQ METODUNUN RİYAZİ ARXİTEKTURASI VƏ EKONOMETRİK MODELƏRDƏ ASİMPTOTİK EFFEKTİVLİYİ

Xülasə

Müasir ekonometrikanın nəzəri və tətbiqi inkişaf mərhələsində parametr qiymətləndirmə metodları arasında Maksimum Oxşarlıq Metodu (Maximum Likelihood Estimation – MLE) xüsusi yer tutur. Bu metod ehtimal nəzəriyyəsinin fundamental prinsiplərinə əsaslanaraq müşahidə olunan seçmənin yaranma mexanizmini parametrik çərçivədə modelləşdirir və həmin parametrlərin ən mümkün qiymətlərini optimallaşdırma vasitəsilə müəyyən edir. Məqalədə Maksimum Oxşarlıq Metodunun riyazi arxitekturası sistemli şəkildə təhlil olunur, likelihood və log-likelihood funksiyalarının quruluşu, skor funksiyası, Fişer informasiya matrisi və Cramer–Rao aşağı sərhədi kontekstində onun nəzəri əsasları araşdırılır. Eyni zamanda, Maksimum Oxşarlıq Metodu qiymətləndiricilərinin qərəzsizlik, konsistentlik, asimptotik normallıq və effektivlik xüsusiyyətləri formal şəkildə şərh olunur. Tədqiqat çərçivəsində xətti və qeyri-xətti ekonometrik modellərdə, o cümlədən Logit, Probit, Poisson və zaman sırası modellərində Maksimum Oxşarlıq yanaşmasının tətbiq mexanizmi geniş şəkildə izah edilir. Ən Kiçik Kvadratlar Metodu metodu ilə müqayisəli təhlil aparılaraq Maksimum Oxşarlıq Metodunun üstünlükləri və məhdudiyyətləri müəyyənəldirilir. Nəticə etibarilə göstərilir ki, Maksimum Oxşarlıq Metodu müasir ekonometrik modelləşmədə yüksək asimptotik effektivlik təmin edən universal metodoloji platforma rolunu oynayır.

Açar sözlər: maksimum oxşarlıq metodu, Likelihood funksiyası, Fişer informasiya matrisi, asimptotik normallıq, ekonometrik modellər, parametr qiymətləndirmə.

Ekonometrika iqtisadi nəzəriyyənin riyazi-statistik metodlar vasitəsilə empirik yoxlanmasını təmin edən elmi istiqamət kimi XX əsrin əvvəllərindən etibarən formalaşmağa başlamışdır. Xüsusilə Ragnar Frisch və Jan Tinbergen tərəfindən aparılan ilkin tədqiqatlar iqtisadi proseslərin riyazi modelləşdirilməsi üçün metodoloji baza yaratmışdır. Sonrakı dövrdə Trygve Haavelmo ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan yanaşmanı ekonometrik analizə tətbiq etməklə parametr qiymətləndirmənin yeni mərhələsini başlatmışdır. Məhz bu kontekstdə Maksimum Oxşarlıq Metodu statistik qiymətləndirmənin ən sistemli və nəzəri cəhətdən əsaslandırılmış alətlərindən biri kimi ön plana çıxmışdır.

Ən Kiçik Kvadratlar Metodu xətti modellər üçün optimal xüsusiyyətlərə malik olsa da, qeyri-xətti və paylanma fərziyyələrinə əsaslanan modellərdə onun imkanları məhdudlaşır. Belə hallarda ehtimal funksiyasının birbaşa optimallaşdırılmasına əsaslanan Maksimum Oxşarlıq yanaşması daha ümumi və elastik metod kimi çıxış edir. Maksimum Oxşarlıq Metodu yalnız xətti deyil, həm də diskret seçim modelləri, say modelləri və zaman sırası strukturlarında parametr qiymətləndirməsinin əsas mexanizmi kimi tətbiq olunur.

Maksimum Oxşarlıq Metodu müşahidə olunan seçmənin yaranma mexanizmini ehtimal çərçivəsində modelləşdirərək, parametr vektorunun ən mümkün qiymətlərini müəyyən etməyə imkan verir. Başqa sözlə parametrlərin ən mümkün qiymətlərini ehtimal funksiyasının maksimumu əsasında

tapmaq metodu kimi də adlandırmaq olar. Bu yanaşma həm nəzəri, həm də empirik iqtisadi tədqiqatlarda geniş istifadə olunur.

Maksimum Oxşarlıq Metodunun əsas məqsədi müşahidə olunan məlumatı “ən yaxşı izah edən” parametr dəyərlərini seçməkdir.

Müasir statistik nəzəriyyədə Maksimum Oxşarlıq Metodu aşağıdakı səbəblərə görə xüsusi əhəmiyyət daşıyır:

1. **Asimptotik effektivlik** təmin edir və böyük nümunələrdə Maksimum Oxşarlıq Metodu qiymətləndiriciləri Cramér–Rao sərhədinə yaxınlaşır.

2. **İnvariantlıq xüsusiyyəti** sayəsində parametr transformasiyalarına qarşı davamlıdır.

3. **Böyük nümunələrdə normal paylanmaya yaxınlaşma** Maksimum Oxşarlıq Metodu statistikasını sadələşdirir və ehtimalları interpretasiya etməyə imkan verir.

Ümumi parametrik modellər üçün universal tətbiq imkanı təqdim edir, xətti, qeyri-xətti, diskret seçim, say və zaman sırası modellərində istifadə oluna bilər.

Məqalənin əsas məqsədi Maksimum Oxşarlıq Metodunun riyazi strukturunu sistemli şəkildə təqdim etmək, onun nəzəri xüsusiyyətlərini formal şəkildə əsaslandırmaq və ekonometrik modellərdə asimptotik effektivliyini elmi müstəvidə təhlil etməkdir.

Belə ki, Maksimum Oxşarlıq Metodu statistikanın və ekonometrikanın fundamental alətlərindən biri kimi uzun tarixi inkişaf keçmişdir. İlk olaraq Ragnar Friş və Jan Tinbergen XX əsrin əvvəllərində iqtisadi proseslərin riyazi modelləşdirilməsi sahəsində ilkin tədqiqatlar aparmış və parametr qiymətləndirmənin metodoloji bazasını formalaşdırmışlar. Sonrakı mərhələdə Trygve Havelmo ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan yanaşmanı ekonometrik analizə tətbiq edərək, parametr qiymətləndirmənin nəzəri əsaslarını daha da genişləndirmişdir.

Ədəbiyyat araşdırmaları göstərir ki, Maksimum Oxşarlıq Metodu həm nəzəri, həm də tətbiqi səviyyədə bir çox üstünlüklərə malikdir. Məsələn, Cameron və Trivedi (2010), iqtisadi modellərdə Maksimum Oxşarlıq Metodunun diskret seçim, say və zaman sırası modellərində optimal qiymətləndirmə təmin etdiyini qeyd edir. Greene (2018) isə qeyri-xətti modellərdə Maksimum Oxşarlıq Metodunun üstünlüyünü xətti OLS metodları ilə müqayisədə ətraflı təhlil etmişdir.

Empirik tədqiqatlarda Maksimum Oxşarlıq Metodunun tətbiqi geniş yayılmışdır:

- Logit və Probit modelləri seçim qərarlarının təhlilində geniş istifadə olunur (Wooldridge, 2016).

- Poisson və say modelləri mikroiqtisadi məlumatlarda nadir hadisələrin təhlilində əsas qiymətləndirmə metodu kimi çıxış edir (Cameron & Trivedi, 1998).

- ARIMA və zaman sırası modelləri makroiqtisadi göstəricilərin proqnozlaşdırılmasında Maksimum Oxşarlıq Metodu tətbiqi mühüm rol oynayır (Box, Jenkins & Reinsel, 2015).

Maksimum Oxşarlıq Metodunun Riyazi Arxitekturası

Maksimum Oxşarlıq Metodu parametr qiymətləndirməni likelihood funksiyasının optimallaşdırılması yolu ilə həyata keçirir. Başqa sözlə maksimum oxşarlıq metodu parametrin elə qiymətini müəyyən edir ki, loqarifmik oxşarlıq funksiyası maksimum qiymət alsın.

Tutaq ki, $Y = \{Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n\}$ müstəqil və eyni paylanmaya malik müşahidələrdir və onların ehtimal sıxlıq funksiyası

$$\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$$

ilə verilir, burada θ lazım olan parametr vektoru olsun.

Maksimum oxşarlıq metodu statistik modelin parametrini, müşahidə olunan seçmənin yaranma ehtimalını maksimum edən log-likelihood funksiyasının maksimum nöqtəsi kimi müəyyən edir. Likelihood funksiyası adlanan funksiyanın analitik forması aşağıdakı kimidir:

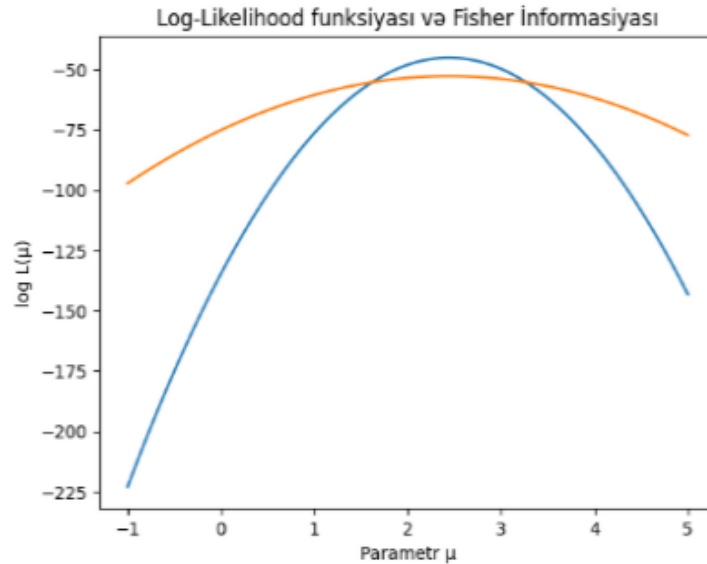
$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(Y_i; \theta)$$

Bu funksiyanın maksimumunu tapmaq məqsədilə log-likelihood funksiyasından istifadə olunur:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f(Y_i; \theta)$$

Log-likelihood funksiyası hesablamaları sadələşdirir və diferensial əməliyyatlarda daha əlverişli rol oynayır.

Aşağıdakı qrafikdə Likelihood funksiyalarının qrafikləri verilmişdir.



● - Böyük Fişer informasiyası

● - Kiçik Fişer informasiyası

Qrafikdən aydın olurki, ayrılərdən biri daha kəskin və yaxud parabolanın qolları sıxılıb. Bunu belə izah etmək olar:

$$I(\mu) = \frac{n}{\sigma^2}$$

$$\sigma=1 \text{ olduqda } I(\mu) = \frac{n}{\sigma^2} = n$$

$$\sigma=2 \text{ olduqda } I(\mu) = \frac{n}{\sigma^2} = \frac{n}{4}$$

olar.

Deməli, $\sigma=1$ olduqda əyri daha kəskin – daha effektiv qiymətləndirmə verir.

Skor Funksiyası və Fişer İnformasiya Matrisi

Maksimum Oxşarlıq Metodu qiymətləndiricisi $\hat{\theta}$ log-likelihood funksiyasının tərtibi sıfır olduğu nöqtədə tapılır:

$$U(\theta) = \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

Skor funksiyası $U(\theta)$ model parametrinə dair həssaslığı ölçür, Fişer informasiya matrisi isə bu həssaslığın dispersiyasını ifadə edərək parametr qiymətləndirilməsinin dəqiqliyini müəyyən edir.

Fişer informasiya matrisi parametrin dəqiqliklə qiymətləndirilməsində əsas rol oynayır:

$$I(\theta) = E \left[\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right],$$

$$Var(\hat{\theta}) \approx I^{-1}(\theta)$$

Bu matris Maksimum Oxşarlıq Metodu asimptotik dispersiyasını təyin edir:

Maksimum Oxşarlıq Metodu qiymətləndiriciləri böyük nümunələr üçün qərəzsizlik və konsistentlik, asimptotik normallıq, asimptotik normallıq xüsusiyyətlərə malikdir.

Maksimum Oxşarlıq Metodu Xətti və Qeyri-Xətti ekonometrik modellərdə tətbiqi mövcuddur.

Belə ki, xətti modellərdə Maksimum Oxşarlıq Metodu qiymətləndiricisi Ən kiçik kvadratlar metodu ilə üst-üstə düşür, qeyri-xətti modellərdə isə ehtimal funksiyasının optimallaşdırılması əsas metod kimi qəbul olunur.

Maksimum Oxşarlıq Metodunun qiymətləndiricisi- parametri təxmin etmək üçün istifadə olunan qayda və ya funksiyadır. Yəni qiymətləndirici özü stokastik funksiyadır, çünki o, məlumatın (seçmənin) dəyişməsinə bağlıdır.

Bu metod ehtimal nəzəriyyəsinin fundamental prinsiplərinə əsaslanaraq müşahidə olunan verilənlərin yaranma mexanizmini parametrik çərçivədə modelləşdirir və həmin parametrlərin ehtimala görə ən uyğun qiymətlərini optimallaşdırma vasitəsilə müəyyən edir.

Bu məqalədə Maksimum Oxşarlıq Metodu statistik qiymətləndirmənin ən sistemli və nəzəri cəhətdən əsaslandırılmış alətlərindən biri kimi ön plana çıxmışdır.

Ən Kiçik Kvadratlar Metodu (Ordinary Least Squares – OLS) xətti modellər üçün optimal xüsusiyyətlərə malik olsa da, real iqtisadi proseslərin qeyri-xətti və paylanma fərziyyələrinə əsaslanan strukturlarında onun imkanları məhdudlaşır. Belə hallarda ehtimal funksiyasının birbaşa optimallaşdırılmasına əsaslanan Maksimum Oxşarlıq Metodu universal və elastik metod kimi çıxış edir. Bu metod yalnız xətti yox, həm də diskret seçim modelləri, say modelləri və zaman sırası strukturlarında parametr qiymətləndirmənin əsas mexanizmi kimi tətbiq olunaraq müasir statistik nəzəriyyədə Maksimum Oxşarlıq Metodu xüsusi əhəmiyyət daşıyır.

Parametrin maksimum oxşarlıq qiymətləndiricisi log-likelihood funksiyasının birinci törəməsinin sıfıra bərabər olduğu və ikinci törəməsinin mənfi olduğu nöqtədə əldə edilir. Maksimum Oxşarlıq Metodu üçün qeyd olunan asimptotik effektivliyin təmini, invariantlıq xüsusiyyəti, böyük seçmələrdə normal paylanmaya yaxınlaşma, informasiya nəzəriyyəsi ilə sıx əlaqə, ümumi parametrik modellər üçün universal tətbiq imkanı anlayışı onun tətbiq sahələrinin sayını da artırır. Maksimum Oxşarlıq Metodunun statistik effektivliyini məsələsi mövcuddur ki, bu məsələni izah etmək üçün Fişer informasiya matrisini bilmək vacibdir.

Belə ki: bu matris Maksimum Oxşarlıq Metodu qiymətləndiricilərinin parametrləri nə qədər dəqiq təxmin edə biləcəyini ölçən mərkəzi anlayışdır, başqa sözlə “parametrlər haqqında məlumatın ölçüsü” kimi başa düşülür. Maksimum Oxşarlıq Metodunun qiymətləndiricilərinin ən güclü xüsusiyyətləri onların asimptotik davranışlarıdır. Yəni nümunə həcmi böyüdükcə Maksimum Oxşarlıq Metodun həqiqi parametrlərə sıxlaşır, asimptotik olaraq isə normal paylanmaya malikdir.

Fisher İnformasiya və Standart Səhvlər

Statistik qiymətləndirmə nəzəriyyəsində parametrin dəqiqliyini müəyyən edən əsas anlayışlardan biri Fişer informasiya kəmiyyətidir. Fişer informasiyası model parametrinə dair müşahidə olunan verilənlərin nə dərəcədə informasiya daşdığını ölçür və bu informasiya birbaşa qiymətləndiricinin dispersiyası ilə əlaqəlidir. Xüsusilə maksimum oxşarlıq metodunda Fişer informasiya matrisi qiymətləndiricinin asimptotik kovarians strukturunu müəyyən edən fundamental anlayışdır.

Məlumdur ki, maksimum oxşarlıq qiymətləndiricisi böyük seçmə həddində asimptotik normal paylanmaya malikdir. Bu halda qiymətləndiricinin kovarians matrisi Fişer informasiya matrisinin tərsinə bərabər olur. Riyazi olaraq bu əlaqə aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$Var(\hat{\theta}) \approx I^{-1}(\theta)$$

Bu nəticə göstərir ki, Fişer informasiyası artdıqca qiymətləndiricinin dispersiyası azalır. Dispersiyanın kvadrat kökü isə standart səhv adlanır. Beləliklə, bir parametr üçün standart səhv aşağıdakı kimi ifadə edilir. Bu bərabərlik Fişer informasiyası ilə standart səhv arasında tərs asılılığın mövcud olduğunu göstərir. Başqa sözlə, model parametrinə dair məlumat nə qədər çoxdursa, qiymətləndirmə bir o qədər dəqiq olur və standart səhv azalır. Normal paylanma nümunəsində bu əlaqə xüsusilə aydın görünür. Əgər müşahidələr $N(\mu, \sigma^2)$ paylanmasına malikdirsə və dispersiya məlumdursa, Fişer informasiyası $I(\mu, \frac{n}{\sigma^2})$ formasında ifadə olunur. Bu halda orta qiymətin standart səhvi

$$SE(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{1}{I(\theta)}}$$

şəklində alınır ki, bu da Fişer informasiyasının artması (yəni seçmə həcmnin böyüməsi və ya dispersiyanın azalması) ilə standart səhvin kiçildiyini nümayiş etdirir. Nəticə etibarilə, Fisher informasiya matrisi qiymətləndiricinin dəqiqliyini ölçən əsas mexanizm rolunu oynayır, standart səhv isə bu dəqiqliyin praktik ifadəsidir. Bu iki anlayış birlikdə statistik qiymətləndirmənin etibarlılığını və effektivliyini xarakterizə edir.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat:

1. Hüseynov, Ə.Ə. (2012). Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı: Elm nəşriyyatı.
2. Kazımov, F.S. (2015). Riyazi statistikanın əsasları. Bakı: Bakı Universiteti nəşriyyatı.
3. Məmmədov, R.A. (2010). Ehtimal nəzəriyyəsi və statistik metodlar. Bakı: Çəşioğlu nəşriyyatı.
4. Əliyev, V.H. (2018). Statistik qiymətləndirmə nəzəriyyəsi. Bakı: Elm və Təhsil nəşriyyatı.
5. Qasımov, S.M. (2016). Riyazi statistika məsələləri və onların həlli üsulları. Bakı: ADPU nəşriyyatı.
6. Süleymanov, M.H. (2014). Ehtimal nəzəriyyəsi və tətbiqləri. Bakı: Bakı Dövlət Universiteti nəşriyyatı.
7. İbrahimov, T.İ. (2019). Parametrik statistik modellər və maksimum oxşarlıq metodu. Bakı: Elm və Təhsil nəşriyyatı.
8. Amemiya, T. (1985). Advanced Econometrics. Harvard University Press.
9. Casella, G., & Berger, R.L. (2002). Statistical Inference (2nd ed.). Duxbury.
10. Greene, W.H. (2018). Econometric Analysis (8th ed.). Pearson.
11. Hayashi, F. (2000). Econometrics. Princeton University Press.
12. Hamilton, J.D. (1994). Time Series Analysis. Princeton University Press.
13. Wooldridge, J.M. (2010). Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data. MIT Press.
14. Lehmann, E.L., & Casella, G. (1998). Theory of Point Estimation (2nd ed.). Springer.
15. Pagan, A., & Ullah, A. (1999). Nonparametric Econometrics. Cambridge University Press.
16. McFadden, D. (1973). Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior. In P. Zarembka (Ed.), *Frontiers in Econometrics* (pp. 105-142). Academic Press.
17. Greene, W.H. (2012). Econometric Analysis (7th ed.). Prentice Hall.

F.M.Mammadova

PhD in Mathematics

Azerbaijan Academy of Labor and Social Relations

ORCID ID 0009-0001-2256-5665

Mathematical architecture of the maximum similarity method and asymptotic efficiency in econometric models

Abstract

Among the parameter estimation methods in the theoretical and applied development of modern econometrics, the Maximum Likelihood Estimation (MLE) occupies a special place. Based on the fundamental principles of probability theory, this method models the mechanism of the observed sample formation in a parametric framework and determines the most likely values of these parameters through optimization. The article systematically analyzes the mathematical architecture of the Maximum Likelihood Method, examines its theoretical foundations in the context of the structure of the likelihood and log-likelihood functions, the score function, the Fisher information matrix and the Cramer–Rao lower bound. At the same time, the unbiasedness, consistency, asymptotic

normality and efficiency properties of the Maximum Likelihood Method estimators are formally interpreted. The study broadly explains the application mechanism of the Maximum Likelihood approach in linear and nonlinear econometric models, including Logit, Probit, Poisson and time series models. A comparative analysis with the Least Squares Method is conducted to determine the advantages and limitations of the Maximum Likelihood Method. As a result, it is shown that the Maximum Similarity Method serves as a universal methodological platform that provides high asymptotic efficiency in modern econometric modeling.

Keywords: *maximum likelihood method, likelihood function, Fisher information matrix, asymptotic normality, econometric models, parameter estimation.*